Теория, методы и методики прогнозирования экономического развития авторегрессионными моделями комплексных переменных

Многие разделы физики и инженерных наук сегодня немыслимы без использования моделей комплексных переменных и методов теории функций комплексного переменного. С их помощью можно описать сложные процессы и явления, которые невозможно или очень сложно описать с помощью моделей действительных переменных.

В экономике, в которой встречаются явления и процессы не меньшей сложности, раздел «Комплекснозначная экономика», в котором с помощью комплекснозначных функций успешно моделируется экономика, находится в стадии формирования.

Одним из подразделов комплекснозначной экономики является комплекснозначное прогнозирование экономики, в частности, краткосрочное прогнозирование с помощью авторегрессионных моделей. Именно формирование этого нового научного направления и являлось объектом нашего исследования.

В общем случае комплекснозначные авторегрессии (*CAR*) могут быть двух типов: 1) модели двух действительных переменных и 2) модели одной действительной переменной с её дополнительной характеристикой, отнесённой к мнимой части.

1. Комплекснозначная модель двух действительных переменных в общем виде можно представить так:

$$y_{1t}+iy_{2t}=\sum_{\tau=1}^{p}F(y_{1(t-\tau)}+iy_{2(t-\tau)})+(\varepsilon_{1t}+i\varepsilon_{2t}) \tag{1}$$

Здесь y_{1t} и y_{2t} – прогнозируемые на момент времени t действительные переменные;

i – мнимая единица, $i=\sqrt{-1}$; F- некоторая комплекснозначная функция; τ –лаг авторегрессии; p – порядок авторегрессии; ε_{1t} и ε_{2t} – ошибки аппроксимации первой и второй переменных в момент времени t.

В зависимости от вида комплекснозначной функции F комплексные авторегрессии могут быть линейными и нелинейными. Нелинейные авторегрессионные модели действительных переменных не часто встречаются как на практике, так и в теории, поэтому в нашем исследовании использовались в основном линейные авторегрессии порядка *p CAR(p)*:

$$y_{1t}+iy_{2t}=\sum_{\tau=1}^{p}(a_{0\tau}+ia_{1\tau})(y_{1(t-\tau)}+iy_{2(t-\tau)})+(\varepsilon_{1t}+i\varepsilon_{2t}) \tag{2}$$

где $a_{0\tau}$ и $a_{0\tau}$ – коэффициенты пропорциональности.

Комплексная авторегрессия первого порядка *CAR(1)* может быть представлена так:

$$\hat{y}_{1t}+i\hat{y}_{2t}=(a_{01}+ia_{11})(y_{1(t-1)}+iy_{2(t-1)}) \tag{3}$$

или в векторной форме:

$$\begin{pmatrix}\hat{y}_{1t}\\ \hat{y}_{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{01} & -a_{11}\\ a_{11} & a_{01}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{1t-1}\\ y_{2t-1}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Если сравнить эту модель с двумерной векторной авторегрессией *VAR(1),* то можно заметить, что для *VAR(1)* необходимо оценить значения четырёх коэффициентов пропорциональности, а для *CAR(1)* – только два. Комплексную авторегрессию (3) можно расширить и на случай большего количества переменных (функция нескольких комплексных переменных). Модель *CAR(p)* является частным случаем векторных авторегрессий *VAR(p)*, и при этом имеет в два раза меньшее количество коэффициентов, чем модель *VAR(p)* (при чётном числе элементов вектора). Исследования показали, что модели *CAR(p)* всегда чуть хуже аппроксимируют прошлое, чем *VAR(p)*. Однако при выборе лучшей модели для моделирования и краткосрочного прогнозирования используют не критерий минимума ошибки аппроксимации, а информационный критерий, в котором минимизируется и дисперсия ошибки, и количество коэффициентов модели. По информационным критериям модели *CAR(p)* всегда предпочтительнее моделей *VAR(p)* за счёт в два раза меньшего количества коэффициентов. При усложнении векторных моделей за счёт использования ошибок *MA(q)* и формировании моделей *VARIMA(p,d,q)* преимущество комплекснозначных моделей *CARIMA(p,d,q)* ещё более увеличивается.

Вывод однозначный: при краткосрочном экономическом прогнозировании векторов экономических показателей следует использовать комплекснозначные модели *CARIMA(p,d,q)*, а не векторные авторегрессии действительных переменных *VARIMA(p,d,q)*.

2. Комплекснозначные авторегрессионные модели одной действительной переменной предполагают, что в модели (1) переменная y_{2t}, отнесённая к мнимой части, должна быть не отдельной переменной, а некоторой дополнительной характеристики переменной y_{1t}. В зависимости от того, что является такой характеристикой, может быть три основных формы:

1) комплексная авторегрессия с ошибкой, когда $y_{2t}=\varepsilon_t$. Ошибка ε_t характеризует особенности динамики рассматриваемого ряда и степень его колеблемости, поэтому она вполне может служить дополнительной характеристикой моделируемого ряда. С учётом этого комплексная переменная модели будет записана так: $(y_t+i\varepsilon_t)$, а сама модель примет вид:

$$\hat{y}_t + i\hat{\varepsilon}_t = \sum_{\tau=1}^{p}(a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i\varepsilon_{t-\tau}) \qquad (5)$$

Модели этого рода обозначены как *CARE(p)*;

2) временна́я комплексная авторегрессия, когда $y_{2t}=t$. Здесь время выступает не только индексом упорядочивания ряда, но и его активной компонентой. В этом случае комплексная переменная принимает вид (y_t+it), а модель будет такой:

$$\hat{y}_t + i\hat{t} = \sum_{\tau=1}^{p}(a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i(t-\tau)) \qquad (6)$$

Эта модель обозначена как *CTAR(p)*;

3) комплексная авторегрессия с приростом, когда $y_{2t}=\Delta y_{1t}$. Прирост может быть равен нулю, он может быть положительным или отрицательным. Он характеризует тенденцию изменения показателя в последний момент наблюдения и выступает его дополнительной характеристикой. Комплексная переменная авторегрессии будет записана так: $(y_t+i\Delta y_t)$. При этом модель следует записать в следующем виде:

$$\hat{y}_t + i\Delta\hat{y}_t = \sum_{\tau=1}^{p}(a_{0\tau} + ia_{1\tau})(y_{t-\tau} + i\Delta y_{t-\tau}) \qquad (7)$$

Такие модели обозначаются как *GCAR(p)*.

Свойства каждой модели, а также пределы их применения на практике были изучены при работе над проектом. Комплекснозначные модели (5) – (7) имеют действительную и мнимую части. Наибольший интерес представляют действительные части этих моделей.

Модели Re*CARE(p,d,g)* обладают очень хорошими аппроксимационными и прогнозными свойствами. Во многих случаях они оказались точнее моделей *ARIMA(p,d,q)*. Поэтому уже сегодня можно рекомендовать их к использованию в задачах краткосрочного экономического прогнозирования или моделирования стохастических процессов.

Другие типы одномерных комплекснозначных авторегрессий – *CTAR*(*p*,*d*,*g*) и *GCAR*(*p*,*d*,*g*) также показывают хорошие результаты. Эти две модели улучшат свои аппроксимационные и прогнозные свойства, если в них учесть ошибки ε_t в форме *MA(q)*. Новые классы моделей *CTARMA*(*p*,*d*,*q*,*g*) и *GCARMA*(*p*,*d*,*q*,*g*) обладают и более высокими аппроксимационными свойствами, и более точными прогнозными свойствами.

Главный вывод: с помощью комплекснозначных авторегрессий *CAR(p)* можно хорошо описать и спрогнозировать экономические процессы, плохо описываемые авторегрессиями действительных переменных. Предложенные модели расширяют инструментальную базу краткосрочного экономического прогнозирования.